Variables aléatoires à densité

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

7.1 Espérance, variance, moments

7.1.1 Quelques rappels

Définition 7.1 – On dit qu'une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est une variable à densité si sa fonction de répartition F_X est :

- continue sur $\mathbf{R}$
- de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Dans ce cas, on appelle densité de X toute fonction positive sur $\mathbf{R}$ ne différant de F'_X qu'en un nombre fini de points.

Proposition 7.2 : *Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Alors f est la densité d'une variable aléatoire si et seulement si :*

- *f est continue sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points*
- *f est positive sur $\mathbf{R}$.*
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge et vaut* 1.

Proposition 7.3 : *Si X est une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et si f_X est une densité de X, alors*

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$$

Plus généralement, $\forall a, b \in \mathbf{R}$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt.$$

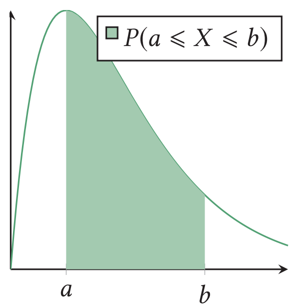


Figure 7.1– Lien entre probabilité et intégrale.

Remarque. En particulier, $\forall a \in \mathbf{R}$, $P(X = a) = 0$. Ceci implique notamment que X prend une infinité de valeurs.

⚠ Il existe[1] des variables aléatoires qui ne sont ni discrètes, ni à densité, même si cette année nous nous limiterons à ces deux types de variables aléatoires.

[1] **Exercice** : trouver une fonction de répartition qui n'est ni celle d'une variable discrète, ni celle d'une variable à densité.

7.1.2 Espérance

Définition 7.4 – Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ converge absolument. On appelle alors espérance de X, et on note $E(X)$ le réel défini par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Discret/densité
Si l'on remplace la somme par une intégrale et les $P(X = k)$ par $f(x)$, cette formule ressemble beaucoup à celle définissant l'espérance des variables discrètes.

Remarque. En fait, puisque $xf(x)$ est de signe constant sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$, cette intégrale est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.

Exemple 7.5 Loi de Cauchy

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Alors f est continue sur $\mathbf{R}$, positive et : $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\pi x^2}$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann, $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Par parité de f, on a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ qui converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

Pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

de sorte que f est une densité. Soit X une variable aléatoire de densité f.
On a $xf(x) \sim_{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{\pi x}$, de sorte que $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ diverge, et donc X n'admet pas d'espérance.

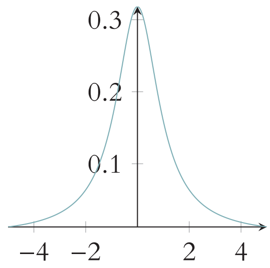


FIGURE 7.2– Densité de la loi de Cauchy.

Proposition 7.6 (Linéarité de l'espérance) : *Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et*

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Précision
Ce résultat, bien qu'intuitif, est loin d'être trivial : déjà il faudrait prouver que $\lambda X + \mu Y$ est une variable aléatoire, puis en déterminer une densité (si elle en admet une !). Nous admettons donc ce résultat.

Proposition 7.7 : *Soient X, Y deux variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant une espérance et telles que $0 \leqslant |X| \leqslant Y$ presque sûrement. Alors X admet une espérance et $|E(X)| \leqslant E(Y)$.*

7.1.3 Fonction d'une variable aléatoire

Rappel : Si X est une variable aléatoire de densité f_X, alors pour tous $a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}$, $aX + b$ est encore une variable à densité dont une densité est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Exemple 7.8

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(2)$. Alors une densité de X est donnée par $f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Si l'on pose $Y = -2X + 3$, alors Y est une variable à densité, dont une densité est donnée par

$$f_Y(x) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{3-x}{2}\right) = \begin{cases} e^{-(3-x)} & \text{si } \frac{3-x}{2} \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} e^{x-3} & \text{si } x \leqslant 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 7.9 : *Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et soit $g : X(\Omega) \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors $g(X)$ est encore une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*

Exemple 7.10

Si X est une variable aléatoire, alors X^2, e^X, $aX+b$ sont encore des variables aléatoires.

Ce résultat ne dit pas si $g(X)$ est encore une variable à densité, ni comment trouver une telle densité. Si g est $\mathcal{C}^1$ sur $X(\Omega)$ et strictement monotone, alors on pourrait montrer que $g(X)$ est encore à densité. Dans tous les cas, pour déterminer si $g(X)$ est ou non à densité et pour déterminer (sous réserve d'existence) l'une de ses densités, on reviendra à la définition en étudiant sa fonction de répartition.

> **ln(0)...**
> La variable X peut prendre la valeur 0, ce qui est alors problématique pour passer au logarithme. Toutefois, ceci ne se produit qu'avec probabilité nulle, et donc n'a pas de réelle influence.
> Si l'on souhaite être exact, on n'a qu'à dire que Y prend la valeur 0 si $X = 0$, ce qui ne changera pas la fonction de répartition de Y et donc pas sa loi.

Exemple 7.11

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$, et soit $Y = -\ln(X)$.
Alors $Y(\Omega) = [0, +\infty[$, et donc pour $x < 0, P(Y \leqslant x) = 0$.
Pour $x \geqslant 0$, on a, par croissance de la fonction exponentielle,

$$P(Y \leqslant x) = P(-\ln X \leqslant x) = P(\ln X \geqslant -x) = P(X \geqslant e^{-x}).$$

Or $e^{-x} \in [0,1]$ et donc $P(X \geqslant e^{-x}) = 1 - F_X(e^{-x}) = 1 - e^{-x}$.
Ainsi, la fonction de répartition de Y est

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On pourrait prouver qu'il s'agit bien de la fonction de répartition d'une variable à densité et en trouver une densité en dérivant F_X là où c'est possible, mais il est plus simple de reconnaître la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
Et donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

> **Loi**
> Rappelons que, par définition, la loi d'une variable aléatoire est déterminée par sa fonction de répartition : deux variables ont même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition. Il n'y a donc aucun besoin de repasser par les densités.

Théorème 7.12 (Théorème de transfert) : *Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X nulle en dehors de $]a,b[$ $(a, b \in \overline{\mathbf{R}})$, et soit $\varphi :]a,b[\to \mathbf{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors $E(\varphi(X))$ existe si et seulement $\displaystyle\int_a^b \varphi(x) f_X(x)\,dx$ converge absolument. En cas de convergence, on a*

$$E(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(x) f_X(x)\,dx.$$

Démonstration. Dans le cas où φ est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, c'est une conséquence (non triviale) du théorème de changement de variables. Le cas général est admis. □

Exemple 7.13

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, et soit $Y = e^X$.
Alors Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t f_X(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^t \lambda e^{-\lambda t}\,dt$ converge absolument.
Or, $\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-1)t}\,dt$ converge si et seulement si $\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$.
De plus, dans ce cas, on a alors $E(Y) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$.

Corollaire 7.14 – *Si X est une variable aléatoire à densité admettant une espérance, alors pour $a \neq 0$ et $b \in \mathbf{R}$, on a $aX + b$ admet une espérance, et*

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

7.1.4 Moments d'ordre supérieur, variance

Définition 7.15 – Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de densité f_X, et soit $r \in \mathbf{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre r si X^r admet une espérance.
Par le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x)\,dx \text{ converge absolument}^2.$$

Dans ce cas, on note $m_r(X) = E(X^r)$.

[2] Comme pour l'espérance, cette intégrale converge si et seulement si elle converge asbolument.

Proposition 7.16 : *Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et soit $r, q \in \mathbf{N}^*$, avec $q \leqslant r$. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q.*

Démonstration. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x|^q \leqslant 1 + |x|^r$, et donc

$$|x|^q f(x) \leqslant f(x) + |x|^r f(x).$$

Mais $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, et donc si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^r f(t)\,dt$ converge[3], il en est de même de $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^q f(t)\,dt$. □

[3] Et vaut 1 !

Remarque. En particulier, une variable aléatoire à densité qui admet un moment d'ordre 2 admet une espérance.

Définition 7.17 – Soit X une variable aléatoire réelle de densité f admet une espérance. On dit que X admet une variance si $(X - E(x))^2$ admet une espérance. D'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)\, dx \text{ converge absolument.}$$

Dans ce cas, la variance de X est

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)\, dx = E((X - E(X))^2)$$

Proposition 7.18 : *Si X est une variable aléatoire réelle de densité f admettant une variance, alors $V(X) > 0$.*
On appelle alors écart-type de X, et on note $\sigma(X)$ le nombre défini

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Démonstration. Notons que la fonction $x \mapsto (x - E(X))^2 f(x)$ est positive sur $\mathbf{R}$, et donc son intégrale est positive ou nulle.
De plus, on remarque que $V(X) = 0$ si et seulement si $(x - E(X))^2 f(x)$ est nulle en tous les points de continuité de f.
Puisque $x - E(X)$ ne s'annule que pour $x = E(X)$, cela signifie que f est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points, ce qui implique alors $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 0$, ce qui est contradictoire avec $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$. □

Proposition 7.19 : *Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance et soient $a, b \in \mathbf{R}$. Alors $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.*

Démonstration. Si $a = 0$, $aX + b$ est une variable constante, de variance nulle.
Sinon, une densité de $aX + b$ est $x \mapsto \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$, les détails sont laissés en exercice. □

Indication
Utiliser le changement de variable $u = \frac{x-b}{a}$.

Proposition 7.20 (Formule de Huygens) : *Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance. Alors X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2. Lorsque c'est le cas, on a alors*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Démonstration. On a, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$(x - E(X))^2 f_X(x) = (x^2 - 2xE(X) + E(X)^2) f_X(x) = x^2 f_X(x) - 2xE(X) f_X(X) + E(X)^2 f_X(x).$$

Mais $\int_{-\infty}^{\infty} 2xE(X) f_X(x)\, dx$ converge et vaut $-2E(X)^2$, et il en est de même de

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(X)^2 f_X(x)\, dx = E(X)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = E(X)^2.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)\, dx$ converge si et seulement si $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx$ converge.
En cas de convergence, on a alors

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

□

Détails
On une égalité reliant quatre intégrales, dont deux convergent. Si la troisième converge, alors la quatrième aussi (une somme d'intégrales convergentes est convergente).
Et inversement si la troisième diverge, nécessairement la quatrième aussi.

7.1.5 Variables centrées, centrées réduites

Définition 7.21 – Une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est dite centrée si X admet une espérance et si $E(X) = 0$.
Une variable aléatoire réelle est dite centrée réduite si X admet une variance et que

$$E(X) = 0 \text{ et } V(X) = 1.$$

Proposition 7.22 : *Si X est une variable aléatoire réelle discrète ou à densité admettant une espérance, alors $X - E(X)$ est centrée.*
Si X est une variable aléatoire réelle discrète ou à densité admettant une variance non nulle[4], alors $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

[4] Cette hypothèse est en fait équivalente à dire que X n'est pas presque certaine.

Démonstration. C'est une conséquence de $E(X+a) = E(X) + a$ et $V(aX+b) = a^2V(X)$. □

7.2 LOIS À DENSITÉ USUELLES

7.2.1 Lois uniformes

Loi uniforme sur $[0,1]$

Définition 7.23 – Une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$ si elle admet pour densité la fonction f_X définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$.

Proposition 7.24 : *Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, alors sa fonction de répartition est donnée par*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leqslant 0 \\ x & si\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & si\ x \geqslant 1 \end{cases}.$$

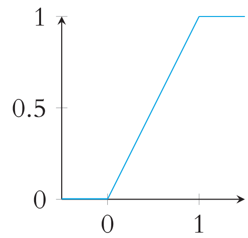


FIGURE 7.3– La fonction de répartition de $\mathscr{U}([0,1])$.

Proposition 7.25 : *Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, alors $E(X) = \dfrac{1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{1}{12}$.*

Démonstration. On a (sous réserve de convergence de l'intégrale) :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f_X(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{12}.$$

□

Loi uniforme sur $[a,b]$

Définition 7.26 – Soient $a < b$. Une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[a,b]$ si elle admet pour densité la fonction f_X définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$.

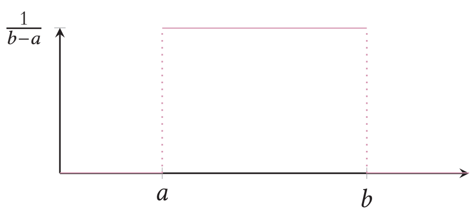


FIGURE 7.4– Densité de la loi uniforme sur $[a,b]$

Remarque. On parle aussi parfois de loi uniforme sur $[a,b]$, sur $[a,b[$ ou sur $]a,b]$. Il s'agit bien de la même loi, une loi uniforme prenant les valeurs a ou b avec probabilité nulle.

Proposition 7.27 : *$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ si et seulement si $\frac{1}{b-a}(X-a) \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.*

Intuition

Il s'agit surtout de se rappeler qu'une transformée affine d'une loi uniforme suit encore une loi uniforme. En effet, si X prend ses valeurs dans $[a,b]$, alors $X-a$ prend ses valeurs dans $[0,b-a]$ et donc $\dfrac{X-a}{b-a}$ prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Remarque. Cette formule, associée à la connaissance de la fonction de répartition de $\mathcal{U}([0,1])$ devrait permettre de déterminer la fonction de répartition de X. Mais si l'on se souvient que cette fonction est affine par morceaux, vaut 0 en a et 1 en b, il n'est pas très dur de retrouver son expression.

Corollaire 7.28 – *Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors*

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Démonstration. On a $\dfrac{1}{2} = E\left(\dfrac{1}{b-a}(X-a)\right) = \dfrac{1}{b-a}E(X) - \dfrac{a}{b-a}$ donc

$$E(X) = (b-a)\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{b-a}\right) = \frac{b-a}{2} + a = \frac{a+b}{2}.$$

De même, on a $\dfrac{1}{12} = V\left(\dfrac{1}{b-a}(X-a)\right) = \dfrac{1}{(b-a)^2}V(X)$ donc $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$. □

7.2.2 Lois exponentielles

Définition 7.29 – Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ si elle admet pour densité la fonction f_X définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

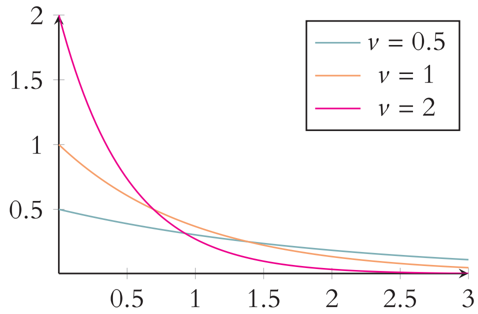


Figure 7.5– Densités de différentes lois exponentielles

Proposition 7.30 : *Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition est donnée par*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

De plus, on a $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Fonction de rép.

La loi exponentielle est une des rares lois (avec la loi uniforme) dont on sait expliciter la fonction de répartition, il faut savoir en profiter.

Démonstration. Sous réserve de convergence, on a

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Effectuons le changement de variable $t = \lambda x$. Alors

$$\int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\lambda}\right) e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\, dt = \frac{\Gamma(3)}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

On en déduit que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$. □

Proposition 7.31 : *Soit $\lambda > 0$. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.*

Astuce
L'important est de savoir qu'une telle relation existe. Si on ne sait plus où se trouve le λ, il est facile de le retrouver en remarquant qu'il s'agit d'une transformation affine.

Démonstration. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$P(\lambda X \leqslant x) = P\left(X \leqslant \frac{x}{\lambda}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \frac{x}{\lambda}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1, donc $\lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Inversement, on montre de la même manière que si $\lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. □

7.2.3 Lois gamma

Proposition 7.32 : *Soit $\nu > 0$. Alors*

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est la densité d'une variable aléatoire.
Si X est une variable aléatoire réelle admettant pour densité f, on dit que X suit la loi γ de paramètre ν, et on note $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$.

Remarque
La constante $\frac{1}{\Gamma(\nu)}$ sert à garantir que l'intégrale sur $\mathbf{R}$ vaut 1.
Sur le même principe, on peut créer une densité à partir de toute fonction f positive sur $\mathbf{R}$, continue sauf en un nombre fini de points et d'intégrale convergente en divisant f par son intégrale sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. f est continue en tout point de $\mathbf{R}$, sauf peut-être[5] en 0, et il est clair que f est positive. De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} t^{\nu-1} e^{-x} dx = 1.$$

Donc f est bien une densité.

□

[5] En fait, pour $\nu > 1$, f est continue en 0. Mais ne perdons pas de temps à le vérifier : une densité à le droit d'avoir un nombre fini de points de discontinuité.

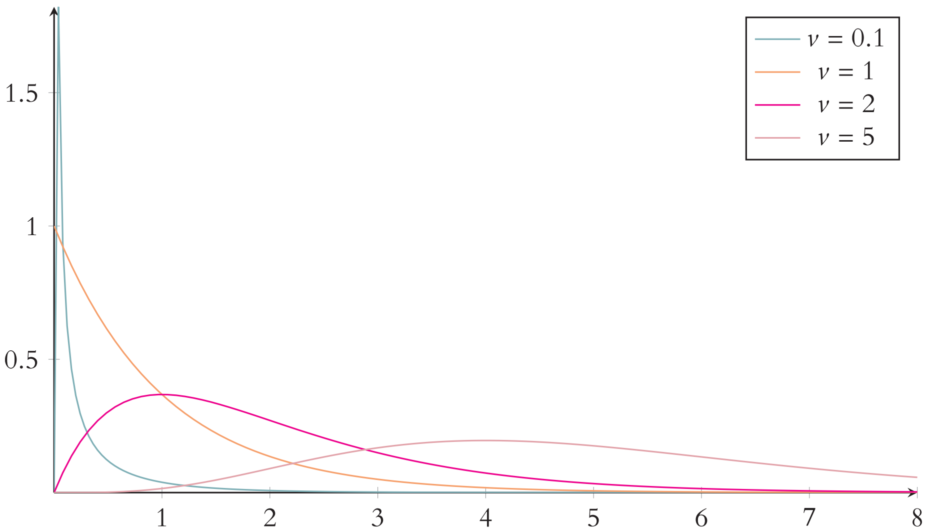


FIGURE 7.6 – Densités de différentes lois γ.

Remarque : notons que la densité d'une loi $\gamma(\nu)$ est bornée si et seulement si $\nu \geqslant 1$.

Remarque. Puisque $\Gamma(1) = 1$, la loi $\gamma(1)$ n'est autre que la loi $\mathcal{E}(1)$.

Proposition 7.33 : *Si $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$, alors $E(X) = \nu$ et $V(X) = \nu$.*

Démonstration. Sous réserve de convergence, on a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} x x^{\nu-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)} = \nu.$$

De même,

$$E(X^2) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} x^{\nu+1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} = \nu(\nu+1)$$

Rappel

$\Gamma(\nu+2) = (\nu+1)\Gamma(\nu+1)$.

On en déduit que

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \nu(\nu+1) - \nu^2 = \nu.$$

□

7.2.4 Lois normales

Définition 7.34 – Soit $\mu \in \mathbf{R}$ et $\sigma > 0$. Alors une variable aléatoire réelle X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si elle admet pour densité la fonction

$$f_X : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

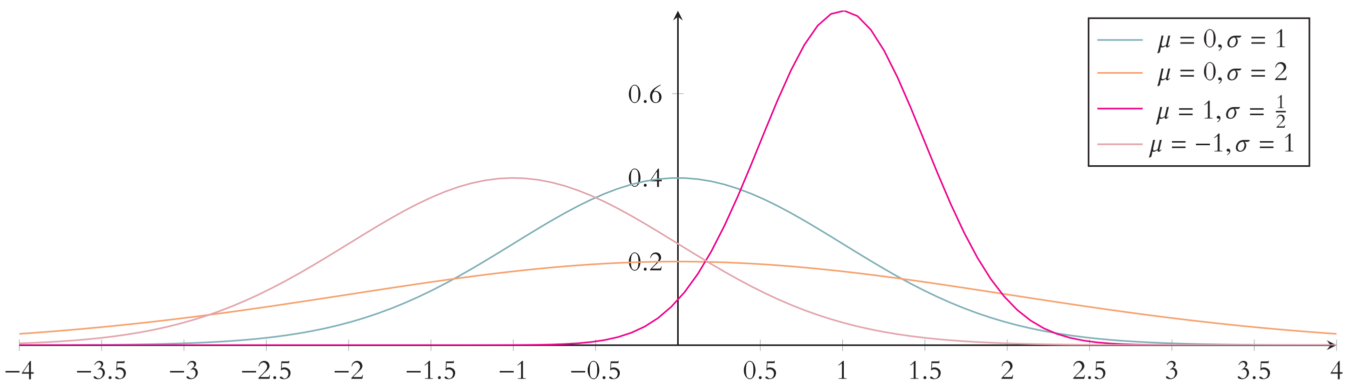


Figure 7.7 – Quelques lois normales

Proposition 7.35 : *Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors pour $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$,, on a*

$$aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

En particulier, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$

Démonstration. Si f désigne la densité de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors une densité de $aX + b$ est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(a\mu+b)}{a\sigma}\right)^2}.$$

□

Proposition 7.36 : *Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$. Autrement dit X est centrée réduite.*

Démonstration. Sous réserve d'existence,

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} 2dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx.$$

Soit $A > 0$. Alors par intégration par parties, avec $u = x$, $v' = xe^{-x^2/2}$

$$\int_0^A x^2 e^{-x^2/2} dx = \left[-xe^{-x^2}2\right]_0^A + \int_0^A e^{-x^2/2} dx \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc $E(X^2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1$, et donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = 1$. □

Corollaire 7.37 – *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *alors*

$$E(X) = \mu \text{ et } V(X) = \sigma^2.$$

Démonstration. On sait que $\frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, donc $\frac{1}{\sigma}(E(X) - \mu) = 0$, donc $E(X) = \mu$. De même, $\frac{1}{\sigma^2}V(X) = 1$, donc $V(X) = \sigma^2$. □

Définition 7.38 – On note $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. C'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt.$$

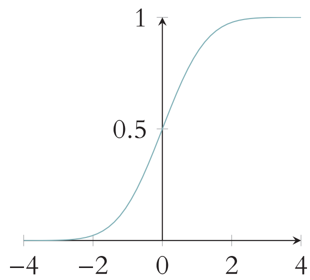


FIGURE 7.8– La fonction Φ.

Proposition 7.39 : $\forall x \in \mathbf{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. *En particulier,* $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration. On a, par le changement de variable $u = -t$

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-t^2/2} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-u^2/2} \, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} \, du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} \, du = 1 - \Phi(x).$$

□

Remarques. • On ne sait pas exprimer Φ à l'aide de fonctions usuelles (résultat difficile prouvé par Liouville vers 1840). En revanche, on sait qu'il s'agit d'une primitive de la densité d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

• Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et donc la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Primitive

Et donc on connaît Φ', qui vaut

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

7.3 SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

7.3.1 Produit de convolution

Théorème 7.40 (Produit de convolution des variables à densité) : *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densités respectives f_X et f_Y. Notons $Z = X + Y$. Si la fonction h définie par la relation*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) \, dt$$

est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points, alors c'est une densité de Z.

Discret/densité

Ce théorème ressemble beaucoup au produit de convolution discret : on a remplacé la somme par une intégrale et les $P(X = k)$ par les densités.

Remarques. • Si f_X ou f_Y sont bornées (ce qui est le cas pour une loi uniforme, une loi exponentielle, une loi normale ou pour une loi $\gamma(\nu)$ avec $\nu \geqslant 1$), alors h est automatiquement définie et continue sauf en un nombre fini de points.
• Ce résultat est faux sans l'hypothèse d'indépendance !

En pratique
Lorsqu'on aura à utiliser le produit de convolution, il n'y aura jamais aucune subtilité sur la continuité de h, et on pourra toujours dire sans précaution (autre que l'indépendance !) que h est une densité de $X + Y$.

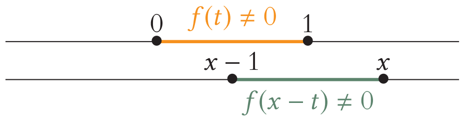
Exemple 7.41

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$, et soit $Z = X + Y$. Notons f la densité de X, et soit

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)\,dt$$

Mais $f(t)f(x-t) \neq 0$ si et seulement si

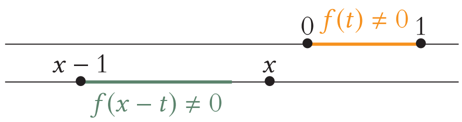
$$\begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x - t \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ x - 1 \leqslant t \leqslant x \end{cases} \Leftrightarrow \max(0, x-1) \leqslant t \leqslant \min(1, x).$$



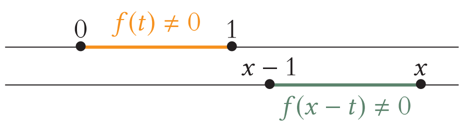
Méthode
Un dessin permet de se représenter les valeurs de t pour lesquelles l'intégrande est non nulle, étape indispensable avant de se lancer dans le calcul de l'intégrale. Il faut alors bien comprendre que les deux dessins représentent l'axe des t, et imaginer que x se déplace. Il s'agit alors de distinguer (suivant les valeurs de x) pour quelles valeurs de t on a à la fois $f(t) \neq 0$ et $f(x-t) \neq 0$.

Donc si $x < 0$, on a $h(x) = 0$.

Explication
Pour tout t, on a soit $f(t) = 0$, soit $f(x-t) = 0$, donc le produit est nul.

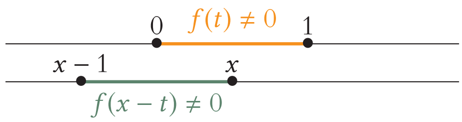


De même, si $x - 1 > 1 \Leftrightarrow x > 2$, alors $h(x) = 0$.



Pour $x \in [0, 1]$, on a

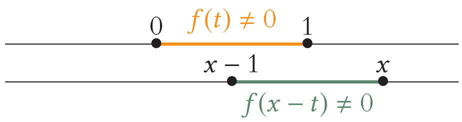
$$h(x) = \int_0^x 1 \times 1\,dt = x.$$



Méthode
Il n'y a aucun besoin de réaliser 4 dessins différents (en cas de besoin, le faire au brouillon suffit largement !), le premier dessin doit permettre de distinguer tous ces cas, il suffit d'imaginer que x se déplace.

Et pour $x \in]1, 2]$,

$$h(x) = \int_{x-1}^{1} 1 \times 1\,dt = 1 - (1 - x) = 2 - x.$$



Ainsi $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbf{R}$, donc Z est une variable aléatoire à densité, et une densité de Z est h.

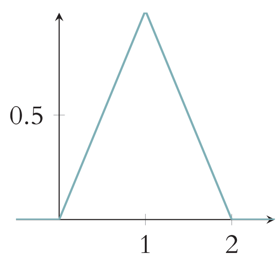


Figure 7.9– La densité h

Proposition 7.42 : *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes admettant une variance, alors XY admet une espérance, et $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

Proposition 7.43 : *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes admettant une variance, alors $X + Y$ admet une variance et*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Remarque

La notion de covariance se généralise aux variables à densité, mais cela dépasse le cadre du programme d'ECS.

7.3.2 Stabilité des lois γ

Proposition 7.44 : *Soit $\nu_1, \nu_2 > 0$, et soient X, Y deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X \hookrightarrow \gamma(\nu_1)$ et $Y \hookrightarrow \gamma(\nu_2)$. Alors $X + Y \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)$.*

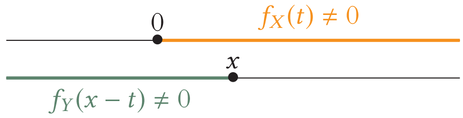
Démonstration. Soit f_X une densité de X et f_Y une densité de Y. Soit alors

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\, dt.$$

Nous admettrons que cette fonction est bien définie et continue sauf peut-être en 0, de sorte qu'il s'agit de la densité de Z.

Remarque

D'après le théorème de convolution, c'est automatique si l'une des deux densités est bornée, ce qui est le cas si $\nu_1 \geqslant 1$ ou $\nu_2 \geqslant 1$.



Si $x \leqslant 0$, alors $h(x) = 0$, car on ne peut avoir à la fois $t \geqslant 0$ et $x - t \geqslant 0$ (f_X et f_Y sont nulles sur $\mathbf{R}_-$).
Si $x > 0$, alors $f_X(t) f_Y(x-t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et $x - t \leqslant 0$, soit $t \notin]0, x[$, de sorte que

$$h(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^x t^{\nu_1 - 1}(x-t)^{\nu_2 - 1} e^{-t-(x-t)}\, dt = \frac{1}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^x t^{\nu_1 - 1}(x-t)^{\nu_2 - 1} e^{-x}\, dt$$

Procédons au changement de variable $u = \frac{t}{x}$. On a alors

$$\int_0^x t^{\nu_1 - 1}(x-t)^{\nu_2 - 1} e^{-x}\, dt = e^{-x} x^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \int_0^1 u^{\nu_1 - 1}(1-u)^{\nu_2 - 1}\, du.$$

Posons $B(\nu_1, \nu_2) = \int_0^1 u^{\nu_1 - 1}(1-u)^{\nu_2 - 1} du \in \mathbf{R}$.

Puisque h est une densité, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx = 1$ et donc

$$1 = \frac{B(\nu_1, \nu_2)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^{+\infty} x^{\nu_1 + \nu_2 - 1} e^{-x}\, dx = \frac{B(\nu_1, \nu_2)\Gamma(\nu_1 + \nu_2)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}.$$

Ainsi, $B(\nu_1, \nu_2) = \frac{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)}$. On en déduit que

$$\forall x > 0, h(x) = \frac{B(\nu_1, \nu_2) x^{\nu_1 + \nu_2 - 1} e^{-x}}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} = \frac{1}{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)} x^{\nu_1 + \nu_2 - 1} e^{-x}.$$

On reconnaît alors la densité de la loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$, donc $Z \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)$. □

Remarque. Si l'on se souvient que la somme de deux lois γ est encore une loi γ, il est facile de retrouver le résultat par linéarité de l'espérance : une loi γ est caractérisée par son espérance, et si $X + Y$ suit une loi γ, son paramètre est nécessairement $E(X) + E(Y) = \nu_1 + \nu_2$.

Corollaire 7.45 – *Si X et Y sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{E}(1)$, alors $X + Y \hookrightarrow \gamma(2)$.*

Démonstration. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Leftrightarrow X \hookrightarrow \gamma(1)$. □

7.3.3 Stabilité des lois normales

Proposition 7.46 : *Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Alors*

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right).$$

Démonstration. Commençons par le cas où X et Y sont toutes deux centrées, c'est-à-dire si $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Alors une densité de $Z = X + Y$ est donnée par

$$h(x) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma_1}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-t}{\sigma_2}\right)^2} dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\sigma_1^2}+\frac{t^2}{\sigma_2^2}-\frac{2xt}{\sigma_2^2}\right)} dt$$

Mais

$$\frac{t^2}{\sigma_1^2} + \frac{t^2}{\sigma_2^2} - \frac{2xt}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}t^2 - 2t\frac{x}{\sigma_2^2}.$$

En posant $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, on a

$$\frac{t^2}{\sigma_1^2} + \frac{t^2}{\sigma_2^2} - \frac{2xt}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}t^2 - 2t\frac{x}{\sigma_2^2} = \left(\frac{\sigma t}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{x\sigma_1}{\sigma_2\sigma}\right)^2 - \frac{x^2\sigma_1^2}{\sigma_2^2\sigma^2}$$

de sorte que

$$h(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\left(1-\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma t}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{x\sigma_1}{\sigma_2\sigma}\right)^2} dt.$$

Réalisons le changement de variable affine $u = \frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2}t - \frac{x\sigma_1}{\sigma_2\sigma}$, soit $dt = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}du$. Alors

$$h(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\left(1-\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}du = \frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

On a bien là la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Dans le cas général, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, alors $X - \mu_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$. De même, $Y - \mu_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
On a alors $(X + Y) - (\mu_1 + \mu_2) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ et donc

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

□

⚠On n'ajoute pas les écart-types, mais bien les variances. Par conséquent, l'écart-type de $X + Y$ est $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Remarque. Comme pour les lois γ, il suffit en fait de se rappeler que la somme de deux lois normales indépendantes est encore une loi normale.
Alors son espérance sera forcément la somme des espérances (par linéarité de l'espérance) et sa variance sera la somme des variances (car X et Y sont indépendantes).